

# Programas das unidades curriculares

## 1º Semestre

### **Análise Matemática I A** (Créditos: 9; Teórico-práticas: 84h)

#### 1. Números reais

Breve apresentação dos números: naturais, inteiros, racionais e reais. Propriedades fundamentais dos números reais (noção de axiomática). Densidade dos racionais no conjunto dos reais. Noções topológicas no conjunto dos números reais: vizinhança, interior, exterior, fronteira, conjunto aberto, conjunto fechado, fecho, ponto de acumulação e ponto isolado. Princípio de indução matemática.

#### 2. Sucessões de números reais

Definição de sucessão. Sucessões limitadas. Operações com sucessões. Sucessões crescentes, decrescentes e monótonas. Subsucessões. Existência de subsucessões monótonas para todas as sucessões de números reais. Noção de limite em  $\mathbb{R}$ . Infinitamente grande. A recta acabada. Propriedades fundamentais dos limites. Sublimites. Existência de sublimites das sucessões limitadas. Limite superior e limite inferior e suas propriedades. Sucessão de Cauchy.  $\mathbb{R}$  como espaço completo.

#### 3. Funções reais de variável real - limites e continuidade

Domínio, contradomínio, gráfico, monotonia, extremos. Função par, ímpar, limitada. Zeros. Restrição e prolongamento. Função injectiva, sobrejectiva e bijectiva. Limite de uma função num ponto. Limite no infinito. Limites infinitos. Unificação dos conceitos de limite usando a recta acabada. Teorema de Heine. Limite e operações elementares. Limite da função composta. Limites relativos: limite por valores diferentes e limites laterais. Existência de limites laterais das funções monótonas limitadas. Função contínua num ponto. Função contínua à esquerda e à direita. Função contínua num conjunto. Teorema de Bolzano. Teorema de Weierstrass. Prolongamento por continuidade. Potenciação real. Continuidade uniforme. Função lipschitziana. Continuidade uniforme e sucessões. Teorema de Cantor.

#### 4. Funções reais de variável real - diferenciabilidade.

Derivada e sua interpretação física. Função diferenciável e interpretação geométrica da derivada. Relações entre diferenciabilidade e continuidade. Derivada e operações algébricas. Derivadas laterais. Derivada da função composta. Derivada da função inversa. Funções trigonométricas inversas e respectivas derivadas. Função derivada. Função de classe  $C_n$  e infinitamente diferenciáveis. Extremo local (máximo e mínimo). Condição necessária sobre as derivadas laterais para a existência de extremo local. Teoremas de Rolle, Darboux, Lagrange e do valor médio de Cauchy. Regra de Cauchy. Fórmula de Taylor. Levantamento de indeterminações. Aplicação da fórmula de Taylor à determinação de extremos, do sentido da concavidade e de pontos inflexão. Assíntotas. Estudo de funções.

### **Álgebra Linear I** (Créditos: 6; Teórico-práticas: 84h)

Breves revisões sobre conjuntos.

#### 1. Matrizes

Definição de matriz do tipo  $p \times n$  sobre o corpo dos reais ou sobre o corpo dos complexos. Tipos especiais de matrizes. Operações com matrizes – produto de um escalar por uma matriz, soma e produto de matrizes. Transposta de uma matriz. Matriz simétrica e matriz anti-simétrica. Potência de expoente  $n$  de uma matriz quadrada. Matriz em forma de escada e matriz em forma de escada reduzida. Transformação elementar nas linhas ou colunas de uma matriz. Característica de uma matriz. Matriz elementar. Matriz invertível. Inversa de uma matriz invertível. Algoritmo para a inversão de uma matriz invertível.

## 2. Sistemas de equações lineares.

Sistema possível e sistema impossível. Sistema possível determinado e sistema possível indeterminado. Matriz simples, matriz dos termos independentes e matriz ampliada de um sistema. Representação matricial de um sistema. Discussão de um sistema e resolução de um sistema possível (usando matrizes). Sistema homogêneo. Sistema homogêneo associado a um dado sistema.

## 3. Espaços vectoriais

Espaço vectorial sobre o corpo dos reais ou sobre o corpo dos complexos. Subespaço vectorial. Intersecção e soma de subespaços vectoriais. Sistema (finito) de vectores. Combinação linear de um sistema de vectores. Subespaço gerado por um sistema de vectores. Espaço vectorial finitamente gerado. Sistema de vectores linearmente independente e sistema de vectores linearmente dependente. Base de um espaço vectorial finitamente gerado. Coordenadas de um vector em relação a uma base. Teorema de Steinitz e suas consequências fundamentais. Dimensão de um espaço vectorial finitamente gerado. Relação entre as dimensões da intersecção e da soma de dois subespaços vectoriais. Espaço-linha e espaço-coluna de uma matriz. Relação entre as dimensões dos espaços linha e coluna de uma matriz e a característica da matriz.

## 4. Aplicações lineares

Definição de aplicação linear. Monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo, endomorfismo, automorfismo. Núcleo e subespaço imagem de uma aplicação linear. Relação entre as dimensões do núcleo e do subespaço imagem de uma aplicação linear cujo espaço de partida é finitamente gerado. Teorema da Extensão Linear. Caracterização de espaços vectoriais finitamente gerados isomorfos através da dimensão. Matriz de uma aplicação linear (entre espaços de dimensão finita positiva) em relação a certas bases e algumas aplicações desta noção. Matriz da composição de aplicações lineares. Relação entre a bijectividade de uma aplicação linear entre espaços com a mesma dimensão  $n$  e a invertibilidade de qualquer das suas matrizes. Matriz de mudança de base. Relação entre matrizes da mesma aplicação linear. Cálculo da dimensão do subespaço imagem de uma aplicação linear através da característica de uma sua matriz. Cálculo da dimensão do subespaço das soluções de um dado sistema homogêneo através do número de incógnitas e da característica da sua matriz simples.

## 5. Determinantes

Definição de determinante de uma matriz quadrada (definição dada por recorrência na ordem da matriz e desenvolvendo segundo a sua primeira linha). Complemento algébrico de um elemento de uma matriz quadrada. Adjunta de uma dada matriz. Propriedades dos determinantes. Caracterização das matrizes invertíveis através do determinante. Cálculo da inversa de uma matriz invertível usando determinantes.

### **Introdução à Programação** (Créditos: 6; Teóricas: 24h; Práticas: 39h)

1. Conceito de Programação. Problemas de programação.
2. Linguagens de programação. Ambientes de programação.
3. Constantes. Variáveis. Tipos de dados.
4. Expressões. Instruções.
5. Funções e procedimentos. Estruturas. Vectores.
6. Noções básicas sobre Algoritmia. Programação estruturada.
7. Máximos e mínimos em vectores. Ordenação de vectores.
8. Processamento de ficheiros de texto. Ficheiros de resultados.
9. Apontadores.
10. Recursividade.

### **Introdução à Lógica e Matemática Elementar** (Créditos: 9; Teórico-práticas: 84h)

1. Lógica proposicional e quantificadores.
2. Noções e operações básicas sobre conjuntos.
3. Estratégias de demonstração.
4. Relações binárias: equivalências e ordens.
5. Funções.
6. Indução matemática e divisibilidade.
7. Conjuntos finitos e infinitos.

## **2º Semestre**

### **Análise Matemática II A** (Créditos: 6; Teóricas: 42h; Práticas: 42h)

1. Primitivas. Primitivação por partes e por substituição. Cálculo de primitivas de funções racionais, irracionais e transcendentais.
2. Cálculo integral. Teorema fundamental do cálculo integral; teorema do valor médio; fórmula de Barrow. Cálculo de áreas de figuras planas.
3. Integrais impróprios. Critérios de convergência para integrais impróprios. Cálculo de áreas de domínios ilimitados.
4. Séries de números reais. Séries de termos não negativos. Séries alternadas. Convergência absoluta. Produto de series.
5. Séries de funções. Convergência pontual e uniforme. Séries de potências. Séries de Taylor.

### **Álgebra Linear II** (Créditos: 9; Teóricas: 42h; Práticas: 42h)

0. Determinantes.
1. Valores e vectores próprios de endomorfismos e matrizes – Definições e propriedades. Subespaços próprios. Polinómio característico. Multiplicidades algébrica e geométrica. Diagonalização. Teorema de Cayley-Hamilton. Polinómio mínimo.
2. Endomorfismos de espaços vectoriais com produto interno - Endomorfismo normal, hermítico (simétrico), hemi-hermítico (anti-simétrico), unitário (ortogonal) e respectivas

definições para matrizes quadradas. Endomorfismo definido positivo, semidefinido positivo, definido negativo, semidefinido negativo, indefinido e respectivas definições para matrizes. Relação entre os diferentes tipos de endomorfismos e as respectivas matrizes em relação a uma base ortonormada. Resultados fundamentais envolvendo estas noções, em particular, teoremas de Schur e espectral.

3. Forma canónica de Jordan e algumas consequências fundamentais.

### **Geometria** (Créditos: 6; Teóricas: 42h; Práticas: 28h)

1. Espaços vectoriais com produto interno – Definição de produto interno e propriedades elementares. Espaço euclidiano e espaço unitário. Matriz da métrica. Norma. Desigualdade de Schwarz. Desigualdade triangular. Ângulo de dois vectores não nulos de um espaço euclidiano. Sistema ortogonal de vectores e sistema ortonormado de vectores. Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Complemento ortogonal. Produto externo e produto misto.

2. Formas bilineares e formas quadráticas – Definição e propriedades elementares. Forma polar.

3. Geometria Afim.

Espaços Afins – Definição e dimensão. Espaço afim euclidiano. Subespaços afim. Proposições de incidência. Referencial de um espaço afim. Coordenadas de um ponto em relação a um referencial. Equações vectoriais, cartesianas e paramétricas de subespaços afins. Geometria euclidiana ou métrica em espaços afins euclidianos - Subespaços afins ortogonais. Distâncias e ângulos. Quádricas.

### **Probabilidades e Estatística I** (Créditos: 6; Teóricas: 42h; Práticas: 28h)

1 – Cálculo Combinatório (breve revisão)

2 – Teoria Elementar da Probabilidade

Experiência aleatória e Espaço de resultados. Evento e Espaço de eventos. O conceito de Probabilidade. Propriedades das Probabilidades. Probabilidade condicional e independência de eventos. Alguns resultados úteis e interessantes, envolvendo probabilidades condicionais. Independência condicional e Independência (marginal). Odds e Odds ratio. Exemplo ilustrativo da razão de ser da definição de independência de mais de dois eventos. Exemplos de aplicação (da noção de probabilidade condicional, da fórmula de Bayes e dos Teoremas de Bayes e das Probabilidades Totais). Os Lemas de Borel-Cantelli.

3 – Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade

Definição de variável aleatória. Exemplos. Funções de distribuição de probabilidade de variáveis aleatórias. Propriedades. Quantis. As funções de sobrevivência e risco – duas outras formas de representar a distribuição de uma v.a. Dedução e estudo de uma função de risco. Funções de sobrevivência e risco para v.a.s discretas. Valor esperado. Propriedades. Momentos. Algumas desigualdades importantes envolvendo momentos. Funções geradoras de momentos e funções características. A distribuição de  $Y = g(X)$ .

4 – Distribuições conjuntas e distribuições condicionais de variáveis aleatórias

Distribuição conjunta de duas ou mais variáveis aleatórias. Momentos conjuntos e momentos marginais. A função geradora de momentos conjunta. Distribuições condicionais e independência. Momentos condicionais. O valor esperado condicional. Algumas notas adicionais sobre o valor esperado condicional. Independência de v.a.s. Consequências da

independência. Outras distribuições condicionadas. As distribuições truncadas como casos particulares de distribuições condicionais. Distribuições conjuntas de v.a.s de tipos diferentes. A distribuição de  $(Y_1, Y_2) = g(X_1, X_2)$ . As distribuições da Soma, Diferença, Produto e Quociente de duas v.a.s. Misturas

#### 5 – Variáveis aleatórias Discretas

Distribuição Uniforme. Distribuição Geométrica. Distribuição Binomial Negativa. Distribuição Bernoulli. Distribuição Binomial. Distribuição Hipergeométrica. Distribuição Poisson

#### 6 – Variáveis aleatórias Contínuas

Distribuição Exponencial. Distribuição Normal. Distribuição Qui-quadrado. Distribuição T. Distribuição F. Distribuição Gama.

#### 7 – Breve referência a variáveis aleatórias Multivariadas

Distribuição Multinomial. Distribuição Normal Multivariada.

**Competências Transversais em Ciências e Tecnologia** (Créditos: 3; Teórico-práticas: 10h; Práticas: 40h)

Observação: funciona no período entre semestres.

#### 1 - Planeamento Curricular para a Empregabilidade:

Curriculum Vitae, sua importância e apresentação. Carta de Motivação. A Entrevista e a Imagem. As Redes Sociais e o Emprego. Planeamento Curricular – aspetos a considerar para melhorar o seu CV. O Teste Psicotécnico no processo de seleção e recrutamento.

#### 2 - Gestão do Tempo, Trabalho em Equipa e Liderança

Gestão do Tempo: A importância do planeamento diário. Objetivos SMART. Importante vs. Urgente: Modelo de Stephen-Covey. Desperdiçadores de Tempo. Eficiência vs. Eficácia. Adiamentos sistemáticos. Adiamentos vs. Perfeccionismo. Gestão de e-mails e Redes Sociais. Trabalho em Equipa: Trabalho Colaborativo – Ferramentas de Edição de Textos. Fatores de coesão e de perturbação da equipa. Escuta Ativa. Liderança: O Líder e a Gestão de Tarefas, Gestão Individual e a Gestão do Grupo. Estilos e Valor da Liderança. Características de um Líder. Linguagem positiva.

#### 3 - Utilização avançada de Folhas de Cálculo

Introdução ao Excel. Introdução ao comando “SE”. Introdução aos comandos “E”, “OU” associados a “SE”. Representação Gráfica. Formatação Condicional. Tabela Dinâmica. Comandos “LIN” e “COL”. Comandos de Contagem. Estatística Básica no Excel. Procura Vertical de Informação (“PROCV”). Otimização de uma função – aplicação à Gestão de Stocks. Utilização do Solver. Introdução ao módulo de Visual Basic do Excel. Definição e funções em VB.

#### 4 - Comunicação em Ciências e Tecnologia.

A Importância da Comunicação. Tipos de Comunicação. Comunicação através de um documento manuscrito. Documento manuscrito. Apresentação dos documentos manuscritos.

Recomendações para uma apresentação oral. Elaboração de relatório, comunicação oral e poster. Comunicação através de um documento escrito. Recomendações. Comunicação com recurso a meios Audio-Visuais. Poster. Recomendações. Comunicar por e-mail. Comunicar na Internet: Fóruns, Chats e Redes Sociais. Ortografia.

5 - Pesquisa Bibliográfica. Análise de Informação. Ética e Deontologia.

Pesquisa bibliográfica com recurso à Internet. Objectivos da pesquisa bibliográfica em Ciência e Tecnologia. Critérios para otimização da pesquisa. Informação pertinente e informação fidedigna. Fontes de informação credíveis. Utilização de um motor de pesquisa especializado para fins académicos. Acesso aberto vs acesso restrito. Utilização de fontes fidedignas em portais de acesso restrito e para fontes abertas. Recursos existentes na b-on e no RCAAP.

Análise (e avaliação) de informação. Escolha de critérios para a avaliação de informação para a execução de trabalhos em Ciência e Tecnologia. Resumos versus sínteses. Utilização do software Ephorus (anti-plágio). Ética e Deontologia: Conceito de plágio. Formas comuns de plágio, possíveis motivos e como evitar. Formas de deteção de plágio. Deteção de passagens que configuram situação de plágio através do software Ephorus. Conceitos de Moral, Ética e Deontologia. Exemplos de Ética em Ciência e de Deontologia no desempenho profissional. O Plágio e a Fraude no Regulamento de Avaliação da FCT/UNL. Os deveres e o dilema no desempenho profissional.

## 3º Semestre

**Análise Matemática III A** (Créditos: 6; Teóricas: 42h; Práticas: 42h)

### 1. Funções reais de várias variáveis reais

O espaço Euclidiano n-dimensional. Métrica euclidiana. Espaços métricos. Funções reais de várias variáveis – exemplos. Limites. Continuidade. Derivadas parciais. Teorema de Schwarz. Diferencial. Derivação de funções compostas. Derivada direcciona. Teorema dos acréscimos finitos. Fórmula de Taylor. Transformações pontuais. Teorema das funções implícitas. Invertibilidade de transformações pontuais. Extremos relativos.

### 2. Linhas em $\mathbb{R}^2$

Representações vectoriais, paramétricas e cartesianas. Linhas regulares. Equações da tangente e da normal a uma linha num ponto. Envoltente de uma família de linhas planas. Rectificação de linhas planas.

### 3. Equações diferenciais ordinárias

Equações diferenciais de primeira ordem. Diferenciais exactas. Métodos do factor integrante. Equações de variáveis separáveis. Equações homogéneas. A equação linear de primeira ordem.

Equações não resolvidas em ordem a  $dy/dx$ . Equações diferenciais de ordem superior à primeira. Equações onde não aparece explicitamente a variável independente ou a função incógnita. Equação diferencial linear de ordem  $n$ , homogénea. Método da variação das constantes arbitrárias para a resolução da equação diferencial linear de ordem  $n$  não homogénea. Determinação de soluções particulares de uma equação diferencial linear de ordem  $n$ , não homogénea de coeficientes constantes. Equação de Euler.

### **Álgebra I** (Créditos: 9; Teóricas: 42h; Práticas: 28h)

#### I. Grupos

Generalidades. Subgrupos. Grupos cíclicos. Classes laterais. Índice de um subgrupo. Relações de congruência. Grupos cociente. Subgrupos normais. Morfismos. Decomposição canónica e Teorema do Homomorfismo. Teoremas do Isomorfismo. Grupo Simétrico.

#### II. Anéis

Generalidades. Divisores de zero. Domínios de integridade. Anéis de divisão. Característica de um anel. Subanéis. Relações de congruência. Anéis cociente. Ideais. Morfismos. Decomposição canónica e Teorema do Homomorfismo. Teoremas do Isomorfismo.

### **Probabilidades e Estatística II** (Créditos: 9; Teóricas: 42h; Práticas: 28h)

#### 1 - Convergência de variáveis aleatórias

Convergência em distribuição e em probabilidade. A Lei Fraca dos Grandes Números Estabelecendo convergência em distribuição. TLC. Convergência em distribuição e convergência de momentos. O Teorema da Continuidade. Convergência em média de ordem  $h$ . Convergência com probabilidade 1. A Lei Forte dos Grandes Números.

#### 2 - Distribuição de algumas Estatísticas Amostrais

#### 3 – Estimação pontual (paramétrica)

Métodos de estimação: Método dos momentos, Máxima Verosimilhança, Mínimos Quadrados, Outros. Algumas propriedades desejáveis dos estimadores: Não enviesamento, Consistência, Invariância, Suficiência, Completude, Eficiência. Estimação não-enviesada: BLUEs, UMVUEs, O limite inferior de Cramer-Rao.

#### 4 – Estimação intervalar (paramétrica)

Intervalos de Confiança. Definição e exemplos. Intervalos de Confiança para amostras grandes

#### 5 – Testes de hipóteses

Algumas noções fundamentais sobre testes de hipóteses. Teste mais potente. O Lema de Neyman-Pearson. Testes de razão de verosimilhanças.

## 6 – Aplicações práticas

Intervalos de Confiança e Testes para a média e variância de populações Normais. Testes Qui-quadrado de independência e de ajustamento. Testes de ajustamento à Normal.

### **Análise Numérica I** (Créditos: 6; Teóricas: 42h; Práticas: 42h)

#### 1. Introdução

#### 2. Erros (complementos) e estabilidade.

Breve revisão das noções básicas associadas à teoria dos erros. Fórmula fundamental do cálculo dos erros. Aplicações. Erros de arredondamento associados à aritmética em vírgula flutuante. Condicionamento e estabilidade.

#### 3. Interpolação polinomial e por splines cúbicos.

Introdução. Interpolação polinomial. Diferenças. Aplicações. Diferenças para argumentos em progressão aritmética. Notação das diferenças ascendentes, descendentes e centrais.

Diferenças divididas. Fórmulas interpoladoras com diferenças. Interpolação inversa.

Interpolação de Hermite. Interpolação por splines cúbicos.

#### 4. Aproximação polinomial dos mínimos quadrados.

Introdução. A aproximação dos mínimos quadrados. Problemas de mínimos quadrados, caso geral. Caso discreto. Cálculo de aproximações de mínimos quadrados. Equações normais. Erros de arredondamento. O problema do mau condicionamento. Escolha de funções de base.

#### 5. Integração Numérica

Introdução. Fórmulas de Newton-Cotes de tipo fechado e de tipo aberto. Erros de truncatura.

Fórmula de Euler-MacLaurin e aplicações. Método de integração de Romberg. Integração Gaussiana.

#### 6. Complementos sobre resolução numérica de equações não lineares.

Breve revisão dos métodos numéricos básicos para a determinação de raízes simples. Método do ponto fixo (Caso Geral). Estudo do método de Newton-Raphson como caso particular do método do ponto fixo. Ordem de convergência de um método iterativo. Breve referência a métodos de determinação de raízes múltiplas.

#### 7. Métodos numéricos em álgebra linear- Resolução de sistemas de equações lineares.

Introdução. Normas de vector e de matriz. Resolução de sistemas de equações lineares.

Condicionamento de um sistema. Breve revisão dos métodos directos de resolução de sistemas de equações lineares. Métodos iterativos de resolução de sistemas de equações lineares. Métodos iterativos (caso geral). Método de Jacobi. Método de Gauss-Seidel.

Condições de convergência. Estimativa do erro.

## 4º Semestre

**Análise Matemática IV A** (Créditos: 6; Teóricas: 42h; Práticas: 42h)

1. Equações diferenciais ordinárias( continuação).

Solução por desenvolvimento em série de uma equação diferencial de segunda ordem. A equação linear homogénea de segunda ordem - pontos singulares. Equações de Bessel. Funções de Bessel. Sistemas de equações diferenciais lineares. Teorema de existência e unicidade de solução para equações diferenciais.

2. Integrais duplos.

Definição de integral duplo. Propriedades do integral duplo. Cálculo de integrais duplos. Interpretação geométrica de um integral duplo como um volume.

3. Integrais curvilíneos.

Fórmula de Riemann-Green. Mudança de variáveis num integral duplo.

4. Superfícies.

Áreas de superfícies. Áreas de superfícies de revolução.

5. Integrais paramétricos.

A regra de Leibniz.

6. Integrais triplos.

Definição de integral triplo. Mudança de variáveis em integrais triplos. Integrais triplos- Aplicações.

7. Campos escalares e campos vectoriais.

Gradiente de um campo escalar. Rotacional e divergência de um campo vectorial. O Laplaciano. Campos conservativos. Integrais curvilíneos independentes do caminho.

8. Integrais de superfície.

Teorema da Divergência. Teorema de Stokes.

**Álgebra II** (Créditos: 6; Teóricas: 42h; Práticas: 28h)

1. Teoria da Factorização

Divisores. Elementos primos e primos entre si. Semigrupos de Gauss. Anéis de Gauss. Anéis de ideais principais. Domínios euclidianos.

2. Anéis de Polinómios

Anéis de polinómios. Algoritmo da divisão. Funções polinomiais. Teoria da factorização em anéis de polinómios. Irredutibilidade.

3. Extensões de corpos

Corpos primos. Extensões. Extensões simples. Extensões algébricas. Subcorpos algebricamente fechados e fecho algébrico de um corpo. Corpo de ruptura e corpos de decomposição. Corpos finitos.

#### 4. Elementos da Teoria de Galois

O grupo de Galois. Extensões normais e separáveis. A correspondência de Galois. Resolução de equações por meio de radicais.

### **Introdução à Física** (Créditos: 3; Teórico-práticas: 42h)

#### 1. Grandezas físicas e unidades

#### 2. Mecânica Clássica

Cinemática de uma partícula. Dinâmica de uma partícula. Trabalho e energia. Momento linear e colisões. Momento angular e rotações. Movimento oscilatório. Ondas.

#### 3. Introdução à Mecânica Estatística

#### 4. Introdução à Mecânica Relativista

#### 5. Introdução à Mecânica Quântica

### **Análise Numérica II** (Créditos: 6; Teóricas: 42h; Práticas: 28h)

#### 1-Análise Numérica Matricial

Condicionamento de uma matriz. Métodos iterativos para a resolução de sistemas de equações: Jacobi, Gauss-Seidel, Relaxação, Métodos do tipo Gradiente. Métodos iterativos para o cálculo de valores e de vectores próprios: Potências iteradas, Jacobi.

#### 2-Resolução numérica de Equações Diferenciais Ordinárias

Método de Euler; Método de Taylor; Métodos de Runge- Kutta; Métodos de passo múltiplo explícitos e implícitos; Métodos preditores - corretores; Equações diferenciais de ordem  $n$ ; sistemas de equações. Método das Diferenças Finitas.

### **Introdução à Investigação Operacional** (Créditos: 6; Teórico-práticas: 70h)

#### 1. Introdução à Programação Linear

Formulação de problemas em Programação Linear. Resolução de problemas de Programação Linear: o método gráfico. Algoritmo Simplex.

#### 2. Gestão de Stocks

Modelos determinísticos. Extensões dos modelos determinísticos: política de descontos, restrições de armazenamento e financeiras.

#### 3. Gestão de Projectos

Método do Caminho Crítico. Diagrama de Gantt / Gestão de recursos. Redução da duração total de um empreendimento. Técnica PERT.

#### 4. Teoria da Decisão

Situações de incerteza e de risco. Critérios de decisão. Utilidade. Introdução à decisão multicritério. Decisões sequenciais.

#### 5. Simulação

Geração de números pseudo-aleatórios: método congruencial misto; método da inversão; método da rejeição e utilização do teorema do Limite Central. Duração da simulação versus precisão de resultados. Aplicações: gestão de recursos hídricos; gestão de projectos; gestão de stocks; estudo de extremos; Cadeias de Markov; introdução à simulação de filas de espera; modelos de simulação visual.

### **Ciência, Tecnologia e Sociedade** (Créditos: 3; Teórico-práticas: 32h; Orientação tutorial: 8h)

Observação: funciona no período entre semestres.

1. Risco, Segurança e Responsabilidade: sociedade de risco e a ética moderna. Ética, responsabilidade social e cidadania
2. Ciência, Tecnologia e Género: as mulheres no trabalho em ciência e tecnologia; o género na construção do discurso científico.
3. Redes de Sustentabilidade - ambiente e sociedade: intersecções entre decisão política/económica, competências científicas e técnicas e questões ambientais.
4. Guerra e Paz: Einstein, Bohr e Oppenheimer: modelos de investigação tecnocientífica contemporâneos e responsabilidade social.
5. O Futuro Bio e Nano: landmarks e debates políticos e éticos.
6. E o Homem Criou o Ciborgue: ciência, tecnologia e cultura popular; medos e desconfianças; fronteiras entre humano e não-humano.
7. Visualizando a modernidade - Ciência, tecnologia e cinema: narrativas cinematográfica e tecnociência.
8. A Sociedade da Informação e a contemporaneidade.

## **5º Semestre**

### **Análise Complexa** (Créditos: 6; Teóricas: 42h; Práticas: 28h)

#### 1. Funções de variável complexa

Aritmética dos números complexos (revisão). Definição das funções elementares. Limites e continuidade. Diferenciabilidade – funções analíticas. Diferenciação das funções elementares. Funções harmónicas. Aplicações conformes.

## 2. Integração de funções de variável complexa

Teorema de Cauchy: Integração de funções de variável complexa. Teorema de Cauchy. Fórmula integral de Cauchy. Teoremas fundamentais: teorema de Morera, desigualdades de Cauchy, teorema de Liouville, teorema fundamental da Álgebra, teorema do máximo do módulo.

## 3. Séries de potências; séries de Laurent

Convergência pontual e uniforme de sucessões e séries de funções. Séries de potências. Teorema de Taylor; analiticidade. Singularidades – séries de Laurent. Singularidades isoladas; classificação de singularidades isoladas.

## 4. Resíduos

Métodos de cálculo de resíduos. Teorema dos resíduos. Aplicação ao cálculo de integrais (reais e complexos).

### **Equações Diferenciais** (Créditos: 6; Teóricas: 42h; Práticas: 28h)

#### 1. Equações diferenciais ordinárias (EDO)

Revisão dos métodos. Exemplos e aplicações. Transformada de Laplace e aplicações. Teoria qualitativa das equações diferenciais: Isóclinas. Curvas integrais. Pontos de equilíbrio. Estabilidade. Órbitas. Planos de fase.

#### 2. Equações com derivadas parciais (EDP)

Método das características. Primeiros exemplos de EDP. Condições iniciais e de fronteira. Problemas bem postos. Equações lineares de primeira ordem. Equações quase-lineares de primeira ordem. Equações de segunda ordem. Classificação. Redução das equações de segunda ordem à forma canónica.

#### 3. Equações com derivadas parciais (EDP)

Método de Fourier. Separação de variáveis e princípio da sobreposição. Séries de Fourier. Teoria de Sturm-Liouville. Equação de propagação das ondas. Equação de propagação do calor. Equação de Poisson. Existência e unicidade de solução. Princípio do máximo.

### **Otimização Linear** (Créditos: 6; Teórico-práticas: 70h)

1. Formulação de problemas de Programação Linear.

2. Formulação de problemas de Programação Linear Inteira (PLI) utilizando variáveis binárias.

3. Método do Simplex – Técnica da Base Artificial.

4. O algoritmo Simplex Revisto.

5. O algoritmo Simplex Dual.

6. Análise de Pós-Otimização, de Sensibilidade e Paramétrica.

7. Dualidade em Programação Linear.

8. O Problema dos Transportes e o Problema de Afectação.

9. Resolução de problemas de PLI: o algoritmo “Branch and Bound”.

### **Medida, Integração e Probabilidades** (Créditos: 6; Teóricas: 42h; Práticas: 28h)

1. A representação diádica de um número real: propriedades. As funções de Bernoulli e de Rademacher. A lei forte e a lei fraca dos grandes números para variáveis de Bernoulli. Modelo de Kolmogorov.
2. O integral de Lebesgue: sigma - álgebras, medidas positivas, funções mensuráveis, integrais de funções mensuráveis, teoremas de convergência. A medida de Lebesgue; cálculo de integrais relativamente à medida de Lebesgue. A esperança matemática.
3. Os espaços de funções integráveis: desigualdade de Hölder e Minkowski; carácter completo dos espaços de funções integráveis.
4. O espaço das funções de quadrado integrável; existência da melhor aproximação neste espaço.
5. Independência: lei de 0-1 de Kolmogorov.
6. Uma lei forte e uma lei fraca dos grandes números. 7. Funções características: um teorema do limite central.

### **Topologia e Introdução à Análise Funcional** (Créditos: 6; Teóricas: 42h; Práticas: 42h)

1. Espaços métricos. Sucessões. Sucessões de Cauchy e Sucessões convergentes. Espaços métricos completos.
2. Espaços Topológicos. Subespaços. Topologia relativa. Separabilidade. Espaços de Hausdorff.
3. Continuidade. Funções contínuas. Homeomorfismos. Compacidade. Conjuntos compactos.
4. Espaços lineares normados. Espaços lineares normados de dimensão finita. Compacidade e dimensão finita. Operadores lineares limitados e operadores lineares contínuos. Espaços de Banach.
5. Espaços lineares com producto interno. Espaços de Hilbert. Conjuntos ortonormados e sucessões. Sucessões e conjuntos ortonormados maximais. Séries relacionadas com sucessões e conjuntos ortonormados. Complementos ortogonais e somas directas. Representações de funcionais em espaços de Hilbert (teorema de Riesz).

## **6º Semestre**

### **Cálculo Financeiro** (Créditos: 3; Teórico-práticas: 42h)

- 1 – Conceitos Básicos
- 2 – Regimes de Capitalização
- 3 – Equivalência de Capitais
- 4 – Rendas
- 5 – Reembolso de Empréstimos
- 6 – Empréstimos por Obrigações
- 7 – O Cálculo Financeiro e as Aplicações de Capital
- 8 – Medidas de Risco de Taxa de Juro

### **Álgebra Computacional** (Créditos: 3; Teórico-práticas: 42h)

1. Introdução. Sistemas computacionais de álgebra.
2. Aplicações do Algoritmo de Euclides.
3. Algoritmos Modulares e interpolação.
4. Multiplicação rápida: o algoritmo de Karatsuba.
5. Factorização de inteiros e criptografia. Sistema RSA.
6. Sistemas de reescrita: procedimento de Knuth-Bendix.
7. Algoritmos envolvendo grupos finitamente apresentados.

### **Introdução à Teoria de Conjuntos** (Créditos: 3; Teórico-práticas: 42h)

1. Motivação e notas históricas
2. Axiomatização de Zermelo-Fraenkel
3. O axioma da escolha
4. Aplicações
5. Abordagens alternativas
6. Questões da investigação actual

### **Mecânica Analítica** (Créditos: 6; Teóricas: 42h; Práticas: 28h)

#### I - Dinâmica das Partículas

Cinemática das Partículas. Cinética das Partículas. Cinética de um sistema de Partículas.

#### II - Dinâmica dos Corpos Rígidos

Cinemática dos Corpos Rígidos. Cinética dos Corpos Rígidos

#### III - Vibrações Mecânicas

#### IV - Cálculo das Variações

Equações de Euler-Lagrange. Princípio de Hamilton.

### **Modelação de Sistemas** (Créditos: 6; Teórico-práticas: 56h)

1. Introdução à Modelação de Sistemas e/ou Processos
2. Modelação de Sistemas / Aplicações: Resolução de "Case Studies":  
Introdução às Heurísticas: O Problema da Mochila. Otimização com restrições - Multiplicadores de Lagrange. Caracterização da relação de dependência entre valores consecutivos de uma série temporal. Introdução à Estatística de Extremos - a distribuição de Gumbel. Modelação de Processos de Poisson; relação entre as distribuições Exponencial e de Poisson. Filas de Espera: aditividade de processos de Poisson. Gestão de Stocks: abordagem conjunta da política de descontos e de uma restrição financeira. Previsão: modelo com tendência não linear e sazonalidade. Cadeias de Markov - Políticas de Manutenção de equipamentos. Simulação. Fiabilidade (simulação). Gestão de Projetos (simulação).

### **Processos Estocásticos** (Créditos: 6; Teóricas: 28h; Práticas: 28h)

1. Revisões de Conceitos Fundamentais

2. Noções Gerais de Processos Estocásticos
3. Processos de Contagem
4. Cadeias de Markov a tempo discreto
5. Martingalas

### **Estatística Aplicada** (Créditos: 6; Teóricas: 28h; Práticas: 28h)

1. Breve revisão de alguns testes fundamentais e sua implementação através de um software adequado. Testes paramétricos para o valor esperado e variância de variáveis aleatórias com distribuição normal. Testes de ajustamento para distribuições discretas e contínuas: teste do qui-quadrado, teste de Kolmogorov-Smirnov, teste de Shapiro-Wilk. Testes não-paramétricos: teste dos sinais, teste de Wilcoxon-Mann-Whitney

#### 2. O Modelo Linear

Formulações do Modelo Linear. O valor esperado condicional como forma de modelação de variáveis aleatórias. Modelos Lineares, Lineares Generalizados e Não-lineares. As asserções associadas ao Modelo Linear. Homocedasticidade. Distribuição do erro. Variáveis explicativas contínuas e categóricas. Os modelos de Regressão Linear, Análise de Variância e Análise de Covariância. O espaço gerado pelas variáveis explicativas. Projecções neste espaço e em subespaços seus. Modelos e Submodelos.

#### 3. A Regressão Linear

Estimação no Modelo de Regressão Linear. Estimação dos parâmetros e funções lineares de parâmetros. O Método dos mínimos quadrados. Breve referência à equivalência entre os métodos dos Mínimos Quadrados e da Máxima Verosimilhança. Distribuições dos estimadores dos parâmetros. Intervalos de confiança. Estimação da variância do erro. Inferência no Modelo de Regressão Linear. A tabela de análise do modelo e o teste ao ajustamento do modelo. Somas de Quadrados associadas ao Modelo, ao Erro e ao Total e respectivos graus de liberdade. A independência entre as Somas de Quadrados relativas ao Modelo e ao Erro. Fraccionamento da Soma de Quadrados do Modelo. Testes aos parâmetros. O teste a um só parâmetro. O teste a uma combinação linear de parâmetros. Testes condicionais. Testes a conjuntos de parâmetros. Teste entre Modelos e Submodelos (testes entre modelos encaixados). O teste F parcial. Análise dos resíduos e um teste para outliers. Diagnóstico de 'pontos influentes'. Transformações das variáveis: i) transformações para linearizar a relação da variável resposta com a(s) variável(eis) regressora(s) ou predictor(a)s; ii) transformações da variável resposta para estabilizar a variância. Abordagem matricial do Modelo Linear e da Regressão Linear: representação do modelo, expressões matriciais para o vector dos estimadores dos parâmetros, variâncias e covariâncias dos estimadores dos parâmetros, resíduos e 'valores estimados' da variável resposta; derivação de Intervalos de Confiança (e testes) para o valor esperado de um 'valor estimado' da variável resposta; expressão das Somas de Quadrados em termos matriciais; determinação do número de graus de liberdade associados a cada Soma de Quadrados (definidos como sendo a característica das matrizes que definem as respectivas formas quadráticas). Derivação da expressão da banda de confiança de Working-Hotelling; Comparações múltiplas e intervalos de confiança simultâneos. A banda de confiança de Working-Hotelling e o método de Scheffé. Análise de alguns problemas que podem surgir na construção de um modelo de Regressão Linear Múltipla, como a colinearidade entre variáveis predictoras. Utilização de modelos de Regressão Linear

Múltipla na análise e testes entre Modelos de Regressão Linear Simples e Regressão Linear Múltipla. O teste de 'lack-of-fit'. O teste de 'lack-of-fit' como teste entre modelos encaixados. Métodos expeditos de procura de um submodelo ajustado aos dados: os métodos Backward, Forward e Stepwise.

#### 4. A Análise de Variância

Realização do teste à igualdade da média de duas populações Normais supostas com igual variância, com base em duas amostras independentes, através da utilização de um Modelo de Regressão Linear. Generalização a várias populações. O Modelo de Análise da Variância a um factor, com efeitos fixos, totalmente casualizado. Vantagens da abordagem destes modelos via Modelo Linear em relação à abordagem clássica. Comparações múltiplas de médias. Testes e Intervalos de Confiança para combinações lineares de parâmetros ou de médias populacionais. Método dos contrastes de Scheffé. O Modelo de Regressão correspondente ao delineamento factorial com dois, três ou mais factores de efeitos fixos. Realização do teste à igualdade da média de duas populações, com base em duas amostras emparelhadas, através da utilização de um Modelo de Regressão Linear. Generalização a várias populações. O Modelo de Análise da Variância em blocos casualizados, com um factor com efeitos fixos.

### **Introdução à Teoria dos Grafos** (Créditos: 6; Teórico-práticas: 70h)

1. Generalidades: Noção de grafo. Teorema do Aperto de Mãos. Isomorfismo. Sequências gráficas.
2. Conexidade.
3. Árvores e Arborescências: Algoritmos de Kruskal e de Prim.
4. Grafos Eulerianos: Algoritmo de Fleury.
5. Grafos Hamiltonianos.
6. Matrizes e Grafos.
7. Planaridade: Fórmula de Euler. Teorema de Kuratowski.
8. Coloração: Número cromático. Polinómio cromático.
9. Fluxos em redes: Teorema do Fluxo Máximo - Corte Mínimo. Algoritmo de Ford-Fulkenson.
10. Emparelhamentos e Recobrimentos: Teorema de Hall.

### **Introdução à Geometria Algébrica e Aplicações** (Créditos: 6; Teóricas: 42h; Práticas: 28h)

1. Revisões de Polinómios, anéis, ideais e anel quociente.
2. Variedades afins e bases de Grobner: ordens monomiais, divisão de polinómios, bases de Grobner, variedades afins, teoria da eliminação.
3. Resolução de sistemas de equações polinomiais via teoria da eliminação.
4. Programação inteira: Problemas de programação inteira, resolução de problemas de programação inteira recorrendo a bases de Grobner.
5. Splines polinomiais a várias variáveis: Módulos sobre anéis, bases de Grobner para módulos sobre anéis, geometria dos politopos, complexos poliédricos, aplicação de bases de grobner de módulos sobre anéis a splines polinomiais.
6. Teoria algébrica de códigos: Álgebras de dimensão finita, corpos finitos, códigos de correcção de erros, códigos cíclicos, Algoritmos Reed-Solomon de decodificação.

### **Geometria Diferencial** (Créditos: 6; Teóricas: 42h; Práticas: 28h)

1. Estudo de Curvas em  $\mathbb{R}^3$ : parametrização por comprimento de arco, curvatura e torção, triedro de Frenet.
2. Estudo de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ : primeira e segunda forma fundamental, curvaturas seccionais, principais, curvatura média e de Gauss, aplicação linear de Weingarten,
3. Subvariedades em  $\mathbb{R}^n$ : aplicações diferenciáveis, espaço tangente e cotangente, diferencial de uma aplicação diferenciável, imersões em  $\mathbb{R}^n$ , subvariedades parametrizadas e fechadas.
4. Geodésicas: definição, equações de geodésicas, exemplos e aplicações.
5. Teorema Egrégio de Gauss: isometrias de superfícies, equações de Codazzi-Mainardi. (opcional)
6. Teorema de Gauss-Bonnet (opcional)
7. Cálculo Tensorial: fundamentos de álgebra linear e multilinear, formas diferenciais, fluxo de um campo vetorial, parêntesis de Lie de dois campos vetoriais, interpretação geométrica, derivadas de Lie. (opcional)
8. Integração em Variedades: Orientação de variedades, integração de formas diferenciais, derivada exterior de uma forma diferencial, variedades com bordo, Teorema de Stokes.(opcional)

### **Introdução ao Cálculo das Variações** (Créditos: 6; Teórico-práticas: 70h)

Introdução ao Cálculo das Variações.

Problemas clássicos do Cálculo das Variações.

A primeira variação. As equações de Euler-Lagrange. Condições de fronteira naturais. Várias variáveis dependentes. Várias variáveis independentes. Problemas isoperimétricos. Problemas com extremos livres: condições de transversalidade. Teoremas de Noether. A segunda variação. Aplicações.

### **Introdução à Teoria dos Números** (Créditos: 6; Teórico-práticas: 70h)

Divisibilidade. Números primos. Máximo divisor comum. Algoritmo de Euclides. Teorema fundamental da aritmética. Métodos elementares de factorização. Factorização de Fermat. Equações diofantinas. Ternos pitagóricos. Congruências e aritmética modular. Equações módulo  $m$ . O teorema do resto chinês. Teorema de Wilson e Teorema de Fermat. Aplicações em critérios de divisibilidade. Teorema de Euler. Função Phi de Euler. Números perfeitos. Resíduos quadráticos. Elementos primitivos. Frações contínuas. Recorrências lineares. Problemas em aberto.

### **Topologia e Homotopia** (Créditos: 6; Teóricas: 42h; Práticas: 28h)

- 1) Espaços topológicos. Vizinhanças. Fecho e interior. Espaços métricos. Funções contínuas. Homeomorfismos. Bases e sub-bases de uma topologia. Subespaços topológicos e topologia induzida. Axiomas de separação. Espaços de Hausdorff. Espaços normais. Teorema da extensão de Tietze. Axiomas de numerabilidade.
- 2) Topologias finais e iniciais. Produtos de espaços topológicos. Topologia quociente. Espaços obtidos por identificação. Adjunção de uma cela a um espaço topológico. Superfícies.
- 3) Espaços topológicos conexos. Conexidade local e componentes conexas. Espaços conexos por arcos. Compacidade de um espaço topológico. Caso dos espaços métricos. Números de Lebesgue de coberturas de espaços métricos compactos. Compacidade local.
- 4) Noção de homotopia. Espaços homotópicos. Homotopia entre caminhos. Grupo fundamental de um espaço topológico. Independência do ponto base. Invariância por homotopia. Espaços de revestimento. Levantamento de caminhos e de homotopias. Acção do grupo fundamental na fibra de um espaço de revestimento. O grupo fundamental da circunferência. Teorema de van Kampen. Grupos apresentados por geradores e relações.
- 5) Aplicações e teoremas de separação no plano: Teorema do ponto fixo de Brouwer (a duas dimensões). Teorema fundamental da álgebra. Teorema da curva de Jordan. Invariância do domínio. Bordo de uma superfície.

Possíveis tópicos extra:

Complexos simpliciais. Triangulações de superfícies. Orientação de superfícies. Classificação de superfícies compactas. Classificação de espaços de revestimento. Revestimento universal. O Polinómio de Alexander para enlases. Triangulações de espaços topológicos. Teorema da aproximação simplicial. Homologia simplicial. Característica de Euler. Complexos CW. Teorema da aproximação celular.