

RESUMO

Estudar problemas da realidade envolvendo logística, como o transporte de materiais ou a alocação de recursos, pode muitas vezes ser resolvido recorrendo a um grafo. Resume-se assim o estudo deste problema a certos parâmetros de grafos, dos quais se destacam a independência e a coloração. A determinação do número de independência é, em particular, um problema complicado em Teoria de Grafos, no sentido em que não são conhecidos algoritmos que o resolvam.

Nesta tese, estuda-se a generalização dos conceitos de independência e de coloração, que continua a ser um problema desafiante pelo facto de constituir uma generalização de um parâmetro difícil de avaliar. Vão ser estudados grafos conexos, entre os quais se destacam as árvores, onde vão ser providenciados resultados originais, como majorantes e minorantes para os números de k -independência e k -cromático de qualquer árvore, assim como construção de árvores que servirão de prova de que os majorantes obtidos são, efetivamente, os melhores possíveis. Em algumas dessas árvores, serão ainda caracterizados os exatos números k -cromáticos.

Devido a serem conceitos relativamente recentes em Teoria de Grafos, o estudo da k -independência e do número k -cromático é ainda uma área revestida de problemas em aberto, aos quais os resultados desenvolvidos nesta tese podem auxiliar na procura por uma resposta.

Palavras-chave: Grafo conexo, Árvore, k -independente, Número k -cromático, Grafo potência

ABSTRACT

Studying real-world problems involving logistics, such as the transportation of materials or the allocation of resources, can often be approached using a graph. This way, the study of such problems is reduced to certain graph parameters, among which independence and coloring stand out. Determining the independence number is, in particular, a challenging problem in Graph Theory, in the sense that no algorithms are currently known that can solve it efficiently.

This thesis explores the generalization of the concepts of independence and coloring, which remains a difficult problem due to being a generalization of an already hard-to-evaluate parameter. We will focus on connected graphs, particularly trees, for which original results will be provided, such as upper and lower bounds for the k -independence and k -distance chromatic numbers of any tree, as well as an algorithmic construction of trees that serve as evidence for the upper bounds' optimality. In some of these trees, the exact k -distance chromatic numbers will also be characterized.

As these are relatively recent concepts in Graph Theory, the study of k -independence and the k -distance chromatic number is still an area filled with open problems, to which the results developed in this thesis may contribute valuable insights.

Keywords: Connected graph, Tree, k -independent, k -distance chromatic number, Power graph